УДК 519.865

ОЦЕНИВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО И ОБРАТНОГО ГАУССОВСКОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

Е.В. Истигечева

Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники
E-mail: ievne@mail.ru

Рассматриваются гиперболическое и обратное гауссовское распределения из класса обобщенных гиперболических распределений для описания финансовых временных рядов. Предлагается алгоритм оценивания параметров этих распределений с помощью метода максимального правдоподобия. Апробация алгоритма проведена на примерах эмпирических финансовых временных рядов.

Введение

Известно, что возвраты большинства финансовых активов являются лептокуртическими, т. е. функция плотности более вытянута в области среднего значения и имеет более тяжелые хвосты, чем у нормального распределения [1]. Неудовлетворительные результаты прогнозирования, полученные при условии нормальности распределения возвратов, заставляют искать новые распределения и разрабатывать подходы для обработки эмпирических финансовых данных. Так, *Mandelbrot* предложил использовать устойчивые законы Парето или α-устойчивые законы для описания финансовых временных рядов [2]. В работах [3, 4] для этих целей было использовано обобщенное *t*-распределение Стьюдента, в [5] – распределение Лапласа. В 1977 г. *Barndoff-Nielsen* [6] описал класс обобщенных гиперболических распределений (*Generalized Hyperbolic* – GH), который стал очень популярным в областях теоретической и практической статистик. GH-распределение активно использовалось в физике, биологии и агрономии, а в 1995 г. Eberlein и Keller впервые применили его в финансах [7]. Указанное распределение имеет ряд свойств, которые являются привлекательными для описания финансовых временных рядов:

- GH-распределение позволяет учитывать асимметричность (известно, что функция плотности возвратов финансовых активов имеет асимметрию);
- хвосты GH-распределения тяжелее, чем у нормального распределения (возникновение редких событий, влияющих на форму и вид хвостов, соответствует получению наибольшей возможной прибыли или риску наибольшего вероятного убытка).

В статье рассматриваются распределения, которые являются подклассами обобщенного гиперболического распределения: гиперболическое распределение (*Hyperbolic* HYP) и обратное гауссовское распределение (*Normal Inverse Gaussian* NIG). Предлагается алгоритм оценивания параметров этих распределений с использованием метода максимального правдоподобия.

Постановка задачи

Функция плотности обобщенного гиперболического распределения имеет вид:

$$\mathrm{gh}(x;\lambda,\mu,\alpha,\beta,\delta)=$$
$$=\frac{(\alpha^2-\beta^2)^{\lambda/2}}{\sqrt{2\pi}\alpha^{\lambda-1/2}\delta^{\lambda}K_{\lambda}(\delta\sqrt{\alpha^2-\beta^2})}(\delta^2+(x-\mu^2))^{(\lambda-1/2)/2}\times$$
$$\times K_{\lambda-1/2}(\alpha\sqrt{\delta^2+(x-\mu)^2})\exp\beta(x-\mu),$$

где μ и δ – параметры положения и масштаба; β – асимметрии, α – устойчивости. Параметр $\lambda\in R$ характеризует определенный подкласс из семейства

обобщенных гиперболических распределений. Для $x \in R$ функция $K_\lambda(\cdot)$ определяется модифицированной функцией Бесселя третьего порядка с параметром λ

$$K_\lambda(x) = \frac{1}{2}\int_0^\infty y^{\lambda-1}\exp\left(-\frac{x}{2}\left(y+\frac{1}{y}\right)\right)dy,\ x>0$$

и следующими свойствами:

1. K_λ является симметричной относительно λ, т. е. $K_\lambda(x) = K_{-\lambda}(x)$.
2. Для $\lambda = \pm\frac{1}{2}$, имеем $K_{\pm\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}x^{-\frac{1}{2}}e^{-x}$.
3. $K'_\lambda(x) = -\frac{\lambda}{x}K_\lambda(x) - K_{\lambda-1}(x)$.
4. $R_\lambda(x) = \frac{K_{\lambda+1}(x)}{K_\lambda(x)}$.
5. $(\log K_\lambda(x))' = \frac{\lambda}{x} - R_\lambda(x)$.

Так, параметр $\lambda=1$ приводит к гиперболическому распределению с плотностью:

$$\mathrm{hyp}(x;\alpha,\beta,\delta,\mu) = \frac{\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}{2\delta\alpha K_1(\delta\sqrt{\alpha^2-\beta^2})}\times$$
$$\times\exp(-\alpha\sqrt{\delta^2+(x-\mu)^2}+\beta(x-\mu)).$$

Соответственно, при $\lambda = -\frac{1}{2}$ получаем обратное гауссовское распределение с плотностью:

$$\mathrm{nig}(x;\alpha,\beta,\delta,\mu) = \frac{\alpha\delta}{\pi}\frac{K_1\left(\alpha\delta\sqrt{1+\left(\frac{x-\mu}{\delta}\right)^2}\right)}{\sqrt{\delta^2+(x-\mu)^2}}\times$$
$$\times\exp(\delta\sqrt{\alpha^2-\beta^2}+\beta(x-\mu)).$$

Назначение параметров α и β для функции gh($x,\lambda,\mu,\alpha,\beta,\delta$) предлагается осуществлять с применением двух параметризаций [8]:

$$\beta = \frac{\zeta\tau}{\delta} \quad \text{и} \quad \alpha = \frac{\zeta\sqrt{1+\tau^2}}{\delta}.$$

Тогда функции плотности исследуемых распределений приобретают следующий вид:

$$\mathrm{hyp}(x,\tau,\zeta,\delta,\mu) = \frac{1}{2\delta\sqrt{1+\tau^2}K_1(\zeta)}\times$$
$$\exp\left(-\zeta\left[\sqrt{1+\tau^2}\sqrt{1+\left(\frac{x-\mu}{\delta}\right)^2}-\tau\frac{x-\mu}{\delta}\right]\right)$$

и

$$\mathrm{nig}(x,\tau,\zeta,\delta,\mu) = \frac{\zeta\sqrt{1+\tau^2}}{\pi}\times$$
$$\times\frac{K_1\left(\zeta\sqrt{1+\tau^2}\sqrt{1+\left(\frac{x-\mu}{\delta}\right)^2}\right)}{\sqrt{\delta^2+(x-\mu)^2}}\exp\left(\zeta+\frac{\zeta\tau}{\delta}(x-\mu)\right).$$

Ставится задача оценивания четверки параметров (τ,ζ,δ,μ) гиперболического и обратного гауссовского распределений с использованием метода максимального правдоподобия.

Оценивание параметров

Предположим, что x_i, $i=1,...,n$ – независимые наблюдения, тогда функции максимального правдоподобия для HYP и NIG-распределений имеют следующий вид:

$$L_1 = \sum_{i=1}^n \log(hyp(x_i,\tau,\zeta,\delta,\mu)),$$
$$L_2 = \sum_{i=1}^n \log(nig(x_i,\tau,\zeta,\delta,\mu)).$$

Поиск максимума осуществляется в соответствии с выполнением необходимого условия существования экстремума четырех переменных.

В случае гиперболического распределения:

$$\frac{dL_1}{d\tau} = \frac{\zeta}{\delta}\left(\begin{array}{c}\sum_{i=1}^n(x_i-\mu)-\frac{\tau}{\sqrt{1+\tau^2}}\times\\ \times\sum_{i=1}^n\sqrt{\delta^2+(x_i-\mu)^2}-\frac{n\tau\delta}{\zeta(1+\tau^2)}\end{array}\right)=0;$$

$$\frac{dL_1}{d\zeta} = \frac{1}{\delta}\left(-n\delta\left(\begin{array}{c}\frac{1}{\zeta}-R_1(\zeta)-\sqrt{1+\tau^2}\times\\ \times\sum_{i=1}^n\sqrt{\delta^2+(x_i-\mu)^2}+\tau\sum_{i=1}^n(x_i-\mu)\end{array}\right)\right)=0;$$

$$\frac{dL_1}{d\delta} = \frac{\zeta}{\delta^2}\left(\begin{array}{c}\frac{-n\delta}{\zeta}+\sqrt{1+\tau^2}\times\\ \times\sum_{i=1}^n\frac{(x_i-\mu)^2}{\sqrt{\delta^2+(x_i-\mu)^2}}-\tau\sum_{i=1}^n(x_i-\mu)\end{array}\right)=0;$$

$$\frac{dL_1}{d\mu} = \frac{\zeta}{\tau}\left(\sqrt{1+\tau^2}\sum_{i=1}^n\frac{x_i-\mu}{\sqrt{\delta^2+(x_i-\mu)^2}}-n\tau\right)=0.$$

Соответственно, для обратного гауссовского распределения:

$$\frac{dL_2}{d\tau} = \frac{2n\tau}{1+\tau^2}-\frac{\tau\zeta}{\sqrt{1+\tau^2}}\times$$
$$\times\sum_{i=1}^n\sqrt{1+\left(\frac{x_i-\mu}{\delta}\right)^2}R_1(a_i)+\frac{\zeta}{\delta}\sum_{i=1}^n(x_i-\mu)=0;$$

$$\frac{dL_2}{d\zeta} = n\left(1+\frac{2}{\zeta}\right)-\sqrt{1+\tau^2}\times$$
$$\times\sum_{i=1}^n\sqrt{1+\left(\frac{x_i-\mu}{\delta}\right)^2}R_1(a_i)+\frac{\tau}{\delta}\sum_{i=1}^n(x_i-\mu)=0;$$

$$\frac{dL_2}{d\delta} = \frac{-n}{\delta}+\frac{\zeta\sqrt{1+\tau^2}}{\delta^3}\times$$
$$\times\sum_{i=1}^n\frac{(x_i-\mu)^2}{\sqrt{1+\left(\frac{x_i-\mu}{\delta}\right)^2}}R_1(a_i)-\frac{\tau\zeta}{\delta^2}\sum_{i=1}^n(x_i-\mu)=0;$$

$$\frac{dL_2}{d\mu} = \frac{-n\zeta\tau}{\delta} + \frac{\zeta\sqrt{1+\tau^2}}{\delta^2}\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i-\mu}{\sqrt{1+\left(\frac{x_i-\mu}{\delta}\right)^2}}R_1(a_i) = 0,$$

где $a_i = \zeta\sqrt{1+\tau^1}\sqrt{1+\left(\frac{x_i-\mu}{\delta}\right)^2}$.

Алгоритмы решений двух указанных систем нелинейных уравнений относительно неизвестных параметров (τ,ζ,δ,μ) в предположении единственности экстремума осуществляются на базе рекуррентных процедур методом наискорейшего спуска, сопряженных градиентов и т. п.

Для NIG-распределения в качестве начальных значений искомых параметров используются решения, определяемые следующей системой уравнений:

$$E(X) = \mu + \delta\tau;$$

$$V(X) = \frac{\delta^2(1+\tau^2)}{\zeta};$$

$$S(X) = 3\frac{\tau}{\sqrt{\zeta}\sqrt{1+\tau^2}};$$

$$K(X) = \frac{3}{\zeta}\left(1+4\frac{\tau^2}{1+\tau^2}\right).$$

Здесь $E(X)$ – математическое ожидание выборки, $V(X)$ – дисперсия, $S(X)$ – коэффициент асимметрии, $K(X)$ – куртозис. Решение этой системы уравнений приведет к нахождению параметров (τ,ζ,δ,μ), которые могут быть использованы в качестве начальных значений для оценивания параметров гиперболического и обратного гауссовского распределений.

Соответственно, для HYP-распределения в качестве начальных значений используются данные HyperbolicDist R-packages [9].

Эконометрических анализ данных

В работе используются данные по валютным парам EUR/USD, GBP/USD, USD/JPY, USD/CHF за период с 03.01.2004 по 29.09.2006 г. (всего 455 значений) в качестве эмпирических временных рядов для оценивания параметров HYP- и NIG-распределений. Данные состоят из дневных цен закрытия, из которых формируются логарифмические возвраты, т. е. $\ln\frac{S_n}{S_{n-1}}$, где S_n – значение котировки валютной пары в день *n*.

В табл. 1 сведены основные статистические характеристики по всем валютным парам, в табл. 2 показаны оценки параметров для HYP- и NIG-распределений.

Таблица 1. *Основные статистические характеристики*

Котировки валют	$M(X)$	$V(X)$	$S(X)$	$K(X)$
EUR/USD	−0,0001	0,000029	0,21673	0,09510
GBP/USD	−0,00002	0,000025	0,23685	0,03847
USD/JPY	0,00031	0,000028	−0,43221	1,03296
USD/CHF	0,00019	0,000035	−0,36500	0,22951

Таблица 2. *Оценки параметров для HYP и NIG-распределений*

Котировки валют	Параметры			
	τ	ζ	δ	μ
HYP-распределение				
EUR/USD	0,34582	20,54527	0,02205	-0,00832
GBP/USD	3,66805	16,96968	0,12459	-0,06550
USD/JPY	-0,28113	5,81484	0,01085	0,00417
USD/CHF	-0,43780	9,93258	0,01571	0,00813
NIG-распределение				
EUR/USD	0,07070	7,07653	0,01420	-0,00114
GBP/USD	5,25364	10,64734	0,12843	-0,04730
USD/JPY	-0,20705	4,60074	0,01119	0,00277
USD/CHF	-0,28605	2,11668	0,01644	0,01459

Из табл. 1 видно, что распределение логарифмических возвратов эмпирических данных характеризуется асимметрией, наличием куртозиса и не может быть описано распределением Гаусса. Используя оценки параметров из табл. 2, можно построить гиперболическое или обратное гауссовское распределения, позволяющие наиболее адекватно описать эмпирические финансовые данные.

Выводы

Рассмотрены гиперболическое и обратное гауссовское распределения из класса обобщенных гиперболических распределений и предложен алгоритм оценивания параметров этих распределений с помощью метода максимального правдоподобия. Полученные оценки параметров используются для описания финансовых временных рядов и построения адекватных математических моделей. Алгоритм успешно апробирован на эмпирических данных.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Mandelbrot B. The variation of certain speculative prices // Journal of Business. – 1963. – V. 36. – P. 394–419.
2. Гамровски Б., Рачев С. Финансовые модели, использующие устойчивые законы // Обозрение прикладной и промышленной математики. – 1995. – Т. 2. – Вып. 4. – С. 556–604.
3. Bollerslev T. A conditionally heteroscedastic time series model for speculative prices and rates of return // Review of Economics and Statistics. – 1987. – V. 69. – P. 542–547.
4. Wagner N., Marsh T. Measuring tail thickness under GARCH and an application to extreme exchange rate changes // Journal of Empirical Finance. – 2005. – V. 12. – P. 165–185.
5. http://taylorandfrancis.metapress.com
6. Barndoff-Nielsen O. E. Exponentially decreasing distributions for the logarithm of particle size // Proc. of the Royal Society London. – 1977. – V. A353. – P. 401–419.
7. Eberlein E., Keller U. Hyperbolic distributions in finance // Bernoulli. – 1995. – V. 1. – P. 281–299.
8. http://cran.r-project.org
9. http://interstat.statjournals.net